1) **Progettare un circuito che dato in ingresso un numero a 4 bit realizza l'incremento di uno.**

Soluzione:

$A=A_3$	$B=A_2$	$C=A_1$	$D=A_0$	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

Si tratta di implementare una funzione a quattro ingressi in quattro uscite.
Calcoliamo Y_3 usando la SOP:

$Y_3 = m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14}$
= ~ABCD + A~B~C~D + A~B~CD + A~BC~D + A~BCD + AB~C~D + AB~CD + ABC~D
= ~ABCD + A~B~C(~D+D) + A~BC(~D+D) + AB~C(~D+D) + ABC~D
= ~ABCD + A~B~C + A~BC + AB~C + ABC~D
= ~ABCD + A~B(~C+C) + AB(~C + C~D)
= ~ABCD + A~B + AB(~C + ~C~D+C ~D)
= ~ABCD + A~B + AB(~C + ~D)
= ~ABCD + A(~B + B(~C + ~D))
= ~ABCD + A(~B + ~B(~C + ~D)+ B(~C + ~D))
= ~ABCD + A(~B + ~C + ~D)
= ~A(BCD) + A(~B + ~C + ~D)
= ~A~~(BCD) + A(~B + ~C + ~D)
= ~A~(~B+~C+~D) + A(~B + ~C + ~D)
= ~A $\oplus$ (~B+~C+~D)

Calcoliamo Y_2 usando la SOP:

$Y_2 = m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14}$
= ~A~BCD + ~AB~C~D + ~AB~CD + ~ABC~D + A~BCD + AB~C~D + AB~CD + ABC~D
= ~A~BCD + ~AB~C(~D + D) + ~ABC~D + A~BCD + AB~C(~D+ D) + ABC~D
= ~A~BCD + ~AB~C + ~ABC~D + A~BCD + AB~C + ABC~D
= (~A+A)~BCD + (~A+A)B~C + (~A+A)BC~D
= ~BCD + B~C + BC~D
= ~B(CD) + B(~C + C~D)
= ~B~(~C+~D) + B(~C + ~D)
= ~B$\oplus$ (~C+~D)

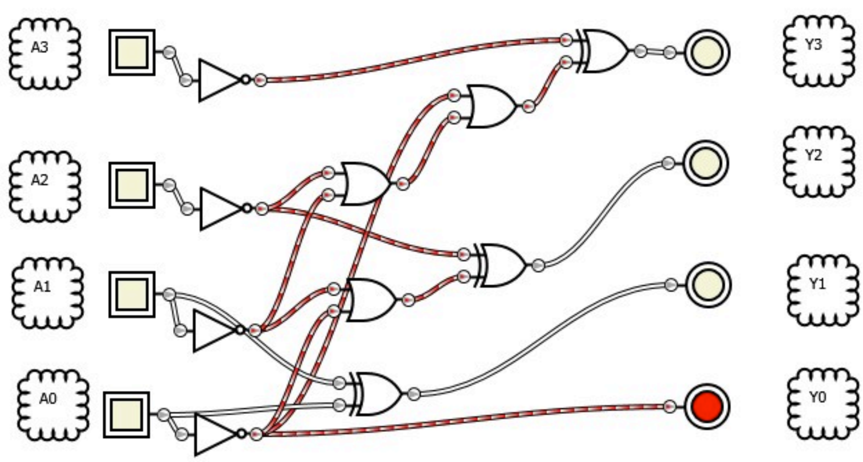
Calcoliamo Y_1 usando la SOP:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} \\
&= \sim A\sim B\sim CD + \sim A\sim BC\sim D + \sim AB\sim CD + \sim ABC\sim D + A\sim B\sim CD + A\sim BC\sim D \\
&\quad + AB\sim CD + ABC\sim D \\
&= \sim A(\sim B+B)\sim CD + \sim A(\sim B+B)C\sim D + A\sim B(\sim CD + C\sim D) \\
&\quad + AB(\sim CD + C\sim D) \\
&= \sim A(\sim CD + C\sim D) + A\sim B(C \oplus D) + AB(C \oplus D) \\
&= \sim A(C \oplus D) + A(\sim B+B)(C \oplus D) \\
&= \sim A(C \oplus D) + A\,(C \oplus D) \\
&= (\sim A+A)(C \oplus D) \\
&= C \oplus D
\end{aligned}
$$

Calcoliamo Y_0 usando la SOP:

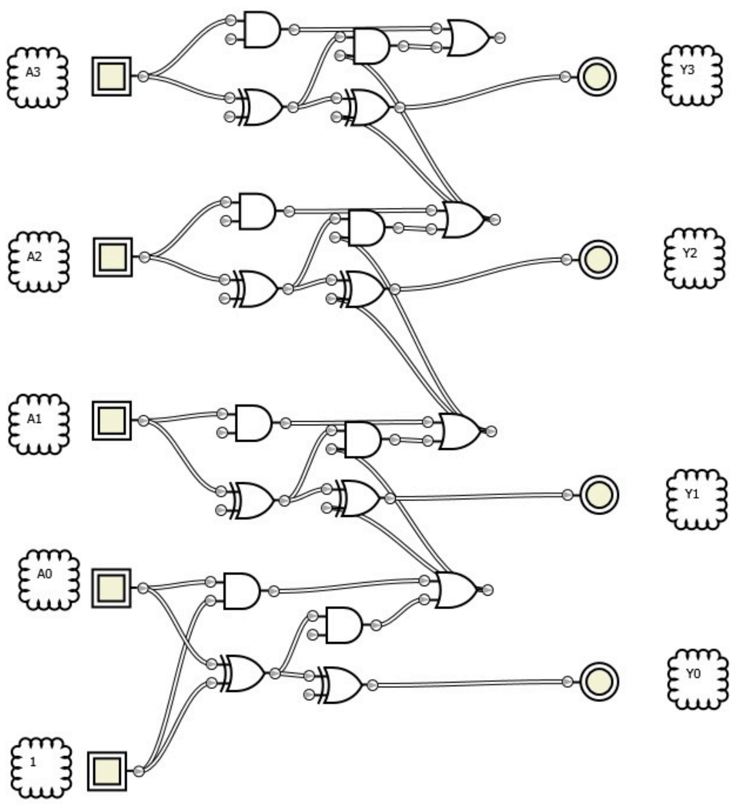
$$
\begin{aligned}
Y_0 &= m_0 + m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + m_{10} + m_{12} + m_{14} \\
&= \sim A\sim B\sim C\sim D + \sim A\sim BC\sim D + \sim AB\sim C\sim D + \sim ABC\sim D + A\sim B\sim C\sim D \\
&\quad + A\sim BC\sim D + AB\sim C\sim D + ABC\sim D \\
&= \sim A\sim B(\sim C+C)\sim D + \sim AB(\sim C+C)\sim D + A\sim B(\sim C+C)\sim D \\
&\quad + AB(\sim C+C)\sim D \\
&= \sim A\sim B\sim D + \sim AB\sim D + A\sim B\sim D + AB\sim D \\
&= \sim A(\sim B+B)\sim D + A(\sim B+B)\sim D \\
&= \sim A\sim D + A\sim D \\
&= (\sim A+A)\sim D \\
&= \sim D
\end{aligned}
$$

Il circuito finale risulta essere:

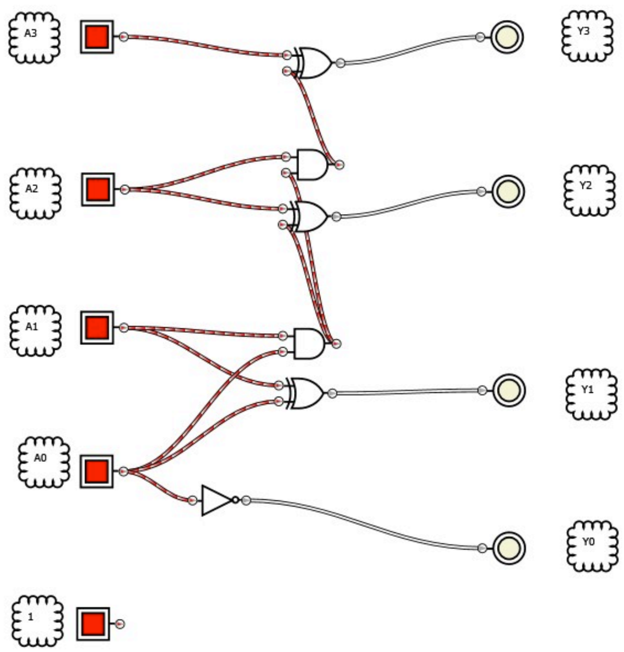


La complessità è 6, il cammino critico 3.

Usando dei sommatori FA possiamo ottenere un circuito equiovalente considerando come secondo addendo la parola binaria 0001:



Considerando il fatto che alcuni terminali sono sempre a 0 oppure a 1, è possibile ottimizzare il circuito eliminando le porte AND, OR e XOR inutili sostituiendole dove necessario con fili o invertitori:



Le funzioni cosi implementate sono:

$Y_0 = \sim D$
$Y_1 = C \oplus D$
$Y_2 = (CD) \oplus B$
$Y_3 = (BCD) \oplus A$

La complessità è 5, il cammino critico 3.

Verifichiamo che il circuito iniziale e la versione con sommatori ottimizzata siano equivalenti. Per Y_3 diventa:

$(BCD) \oplus A =$
$= \sim(BCD)\ A + (BCD) \sim A$
$= \sim(BCD) \oplus \sim A$
$= (\sim B + \sim C + \sim D) \oplus \sim A$
$= \sim A \oplus (\sim B + \sim C + \sim D)$

Per Y_2 diventa:
$(CD) \oplus B =$
$= \sim(CD)\ B + (CD) \sim B$
$= \sim(CD) \oplus \sim B$
$= (\sim C + \sim D) \oplus \sim B$
$= \sim B \oplus (\sim C + \sim D)$