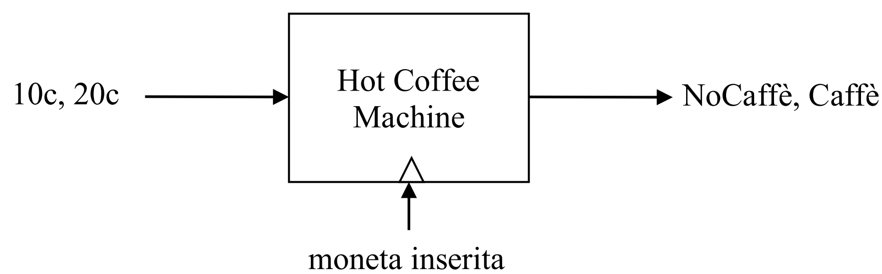
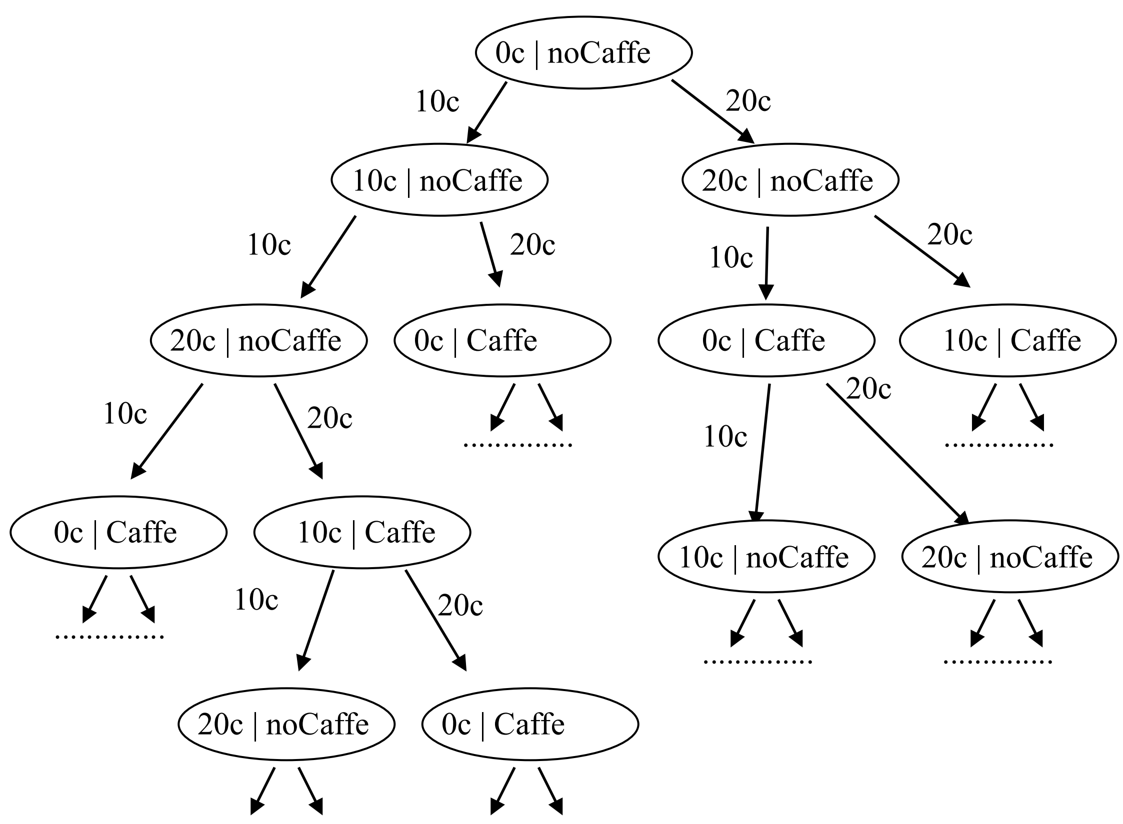
Esercizio sugli automi di Moore

1. Realizzazione tramite MSF di una macchinetta del caffè

Supponiamo di voler modellare tramite un automa astati finiti di Moore una macchinetta del caffè che rilascia un caffè quando l'utente introduce monete per 30 centesimi e supponiamo che accetti in ingresso monete da 10c e 20c. Supponiamo che le transizioni dell'automa si verifichino in corrispondenza dell'inserimento delle monetine e supponiamo per semplicità che la generazione del caffè sia istantanea (non bisogna attende che la macchinetta abbia finito di fare il caffè per accettare nuove monete).



Lo stato della macchina sarà in funzione della quantità di denaro inserito non ancora utilizzato e della necessità di "generare in uscita" il caffè richiesto. Esaminiamo la sequenza di stati possibili supponendo che la macchina parta dallo stato iniziale S_0 corrispondente a nessuna monetina inserita.



Massimo Marchi – marchi@dsi.unimi.it

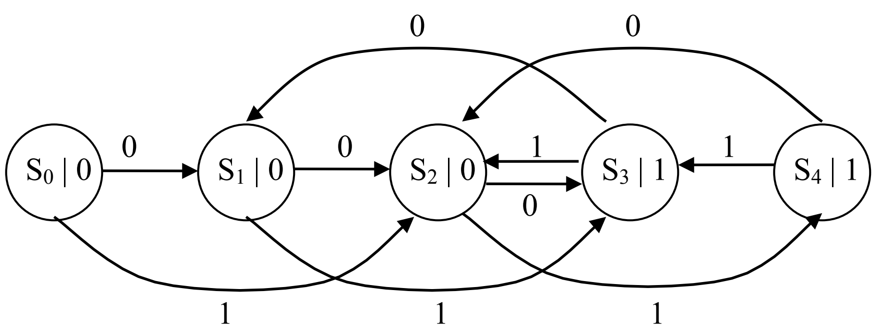
Dall'analisi della successione degli stati si può dedurre che la macchina si può trovare in al più 5 stati possibili:

Stato	Descrizione
S_0	Resto = 0c , noCaffe
S_1	Resto = 10c , noCaffe
S_2	Resto = 20c , noCaffe
S_3	Resto = 0c , Caffe
S_4	Resto = 10c , Caffe

Rappresentiamo le monete in ingresso attraverso un bit: assegnamo **0** alle monete da **10c** ed **1** alle monete da 20c. Analogamente assegnamo **0** all'uscita **noCaffe** ed **1** all'uscita **Caffe.**

Nota: la mappatura tra possibili ingressi e codice binario corrispondente in applicazioni reali è spesso decisa dai circuiti presenti alla periferia dell'automa e quindi non è modificabile. Analogo discorso vale per la corrispondenza tra codice binario in uscita ed azione generata dal sistema. Diverso discorso vale per la mappatura tra stati interni e codice binario utilizzato all'interno dei latch di memoria che possiamo decidere arbitrariamente.

L'STG dell'automa quindi è il seguente:



L'STT dell'automa quindi è il seguente:

Stato	I_0=0	I_0=1	O
S_0	S_1	S_2	0
S_1	S_2	S_1	0
S_2	S_3	S_4	0
S_3	S_1	S_2	1
S_4	S_2	S_3	1

Il numero di latch necessari per memorizzare i cinque stati possibili è:[1]

$$\textbf{n.latch} = \text{ceil}(\log_2 \mathbf{5}) = \text{ceil}(\mathbf{2.32}) = \mathbf{3}$$

Per sintetizzare il circuito logico corrispondente all'automa dobiamo dare una mappatura tra gli stati possibili e le configurazioni del latch. Poichè **3** latch sono in grado di

[1] ceil(x) = l'intero più piccolo non inferiore a x. Es. ceil(3.1)=4 , ceil(4)=4.

codificare $\mathbf{2^3 = 8}$ stati possibili, nel sistema in esame esisteranno **8-5 = 3** configurazioni che non verranno mai raggiunte. Per queste configurazioni le funzioni stato-prossimo e uscita non sono definite e possono essere settate a velori arbitrari (allo scopo di semplificarne la formula logica).

Utilizziamo la seguente mappatura che semplicemente enumera gli stati:

Stato	**Descrizione**	$\mathbf{Q_0Q_1Q_2}$
S_0	Resto = 0c , noCaffe	000
S_1	Resto = 10c , noCaffe	001
S_2	Resto = 20c , noCaffe	010
S_3	Resto = 0c , Caffe	011
S_4	Resto = 10c , Caffe	100

L'STT risultante è la seguente:

$\mathbf{Q_0^*Q_1^*Q_2^*}$	$\mathbf{I_0}$		
$\mathbf{Q_0Q_1Q_2}$	0	1	$\mathbf{O_0}$
000	001	010	0
001	010	011	0
010	011	100	0
011	001	010	1
100	010	011	1

Riscrivo la STT in forma tabellare separando le variabili $\mathbf{Q_0^*Q_1^*Q_2^*}$:

$\mathbf{I_0Q_0Q_1Q_2}$	$\mathbf{Q_0^*}$	$\mathbf{Q_1^*}$	$\mathbf{Q_2^*}$
0000	0	0	1
0001	0	1	0
0010	0	1	1
0011	0	0	1
0100	0	1	0
0101	X	X	X
0110	X	X	X
0111	X	X	X
1000	0	1	0
1001	0	1	1
1010	1	0	0
1011	0	1	0
1100	0	1	1
1101	X	X	X
1110	X	X	X
1111	X	X	X

in cui le X rappresentano valori indefiniti delle funzioni (corrispondenti a configrazioni impossibili).

Uso le forme SOP per sintetizzare le funzioni logiche per le tre variabili e pongo tutti i valori indefiniti X a 0 (come nell'esempio precedente uso per comodità di scrittura ABCD al posto di $I_0Q_0Q_1Q_2$):

$$\mathbf{Q_0^*} = A{\sim}BC{\sim}D = I_0{\sim}Q_0Q_1{\sim}Q_2$$

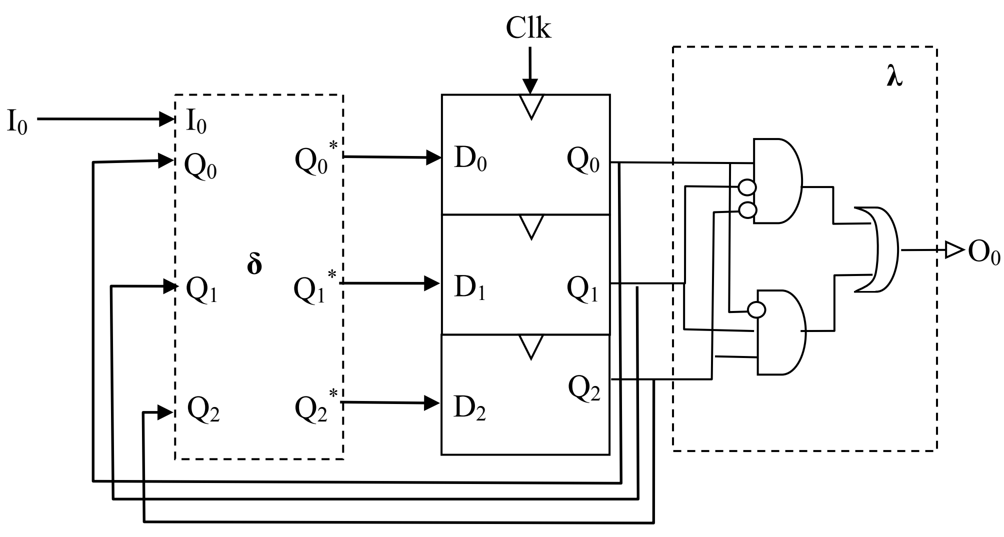
$$\begin{aligned}
\mathbf{Q_1^*} &= {\sim}A{\sim}B{\sim}CD + ({\sim}A{\sim}BC{\sim}D + {\sim}AB{\sim}C{\sim}D) + (A{\sim}B{\sim}C{\sim}D + A{\sim}B{\sim}CD) \\
&\quad + A{\sim}BCD + AB{\sim}C{\sim}D \\
&= {\sim}A{\sim}B{\sim}CD + A{\sim}BCD + ({\sim}BC + B{\sim}C) {\sim}A {\sim}D + A{\sim}B{\sim}C + AB{\sim}C{\sim}D \\
&= {\sim} (A \oplus C) {\sim}BD + (B \oplus C) {\sim}A {\sim}D + A{\sim}C({\sim}B + B{\sim}D) \\
&= {\sim} (A \oplus C) {\sim}BD + (B \oplus C) {\sim}A {\sim}D + A{\sim}C({\sim}BD + {\sim}B{\sim}D + B{\sim}D) \\
&= {\sim} (A \oplus C) {\sim}BD + (B \oplus C) {\sim}A {\sim}D + A{\sim}C({\sim}BD + {\sim}D) \\
&= {\sim} (A \oplus C) {\sim}BD + (B \oplus C) {\sim}A {\sim}D + A{\sim}C({\sim}BD + {\sim}B{\sim}D + {\sim}D) \\
&= {\sim} (A \oplus C) {\sim}BD + (B \oplus C) {\sim}A {\sim}D + A{\sim}C({\sim}B + {\sim}D) \\
&= {\sim}(I_0 \oplus Q_1) {\sim}Q_0Q_2 + (Q_0 \oplus Q_1) {\sim}I_0{\sim}Q_2 + I_0{\sim}Q_1 ({\sim}Q_0 + {\sim}Q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q_2^*} &= {\sim}A{\sim}B{\sim}C{\sim}D + ({\sim}A{\sim}BC{\sim}D + {\sim}A{\sim}BCD) + (A{\sim}B{\sim}CD + AB{\sim}C{\sim}D) \\
&= ({\sim}A{\sim}B{\sim}C{\sim}D + {\sim}A{\sim}BC) + A{\sim}C ({\sim}BD + B{\sim}D) \\
&= {\sim}A{\sim}B ({\sim}C{\sim}D + C) + A{\sim}C ({\sim}BD + B{\sim}D) \\
&= {\sim}A{\sim}B ({\sim}C{\sim}D + CD + C) + A{\sim}C ({\sim}BD + B{\sim}D) \\
&= {\sim}A{\sim}B ({\sim}D + C) + A{\sim}C ({\sim}BD + B{\sim}D) \\
&= {\sim} I_0{\sim}Q_0 ({\sim} Q_2 + Q_1) + I_0{\sim}Q_1 (Q_0 \oplus Q_2)
\end{aligned}$$

La funzione di uscita, sintetizzata con la forma SOP, sarà:

$$\mathbf{O_0} = {\sim}Q_0Q_1Q_2 + Q_0{\sim}Q_1{\sim}Q_2$$

Il circuito fisico risultante sarà:



dove il quadrato tratteggiato **δ** rappresenta il circuito logico (omesso per brevità) che realizza la funzione stato prossimo in tre variabili Q_0^* Q_1^* Q_2^*.

Le formule per Q_1^* e Q_2^* risultano alquanto complesse. E' possibile tentare di ottenere un risultato più compatto scegliendo opportunamente i valori indefiniti. Riconsideriamo la STT precedente e proviamo un'altra configurazione di 0 ed 1 per i valori indefiniti che aiuti nelle semplificazioni:

$I_0Q_0Q_1Q_2$	Q_1^*	Q_2^*
0000	0	1
0001	1	0
0010	1	1
0011	0	1
0100	1	0
0101	**1**	**1**
0110	**1**	**0**
0111	**1**	**0**
1000	1	0
1001	1	1
1010	0	0
1011	1	0
1100	1	1
1101	**1**	**0**
1110	**1**	**1**
1111	**1**	**1**

Calcoliamo Q_1^* ottimizzando i valori indeterminati per utilizzare le POS: pongo tutte le X della colonna a valore **1**. La funzione ora ha solo 3 zeri e quindi solo tre max-termini:

$\mathbf{Q_1^*} \quad = \quad (I_0+Q_0+Q_1+Q_2)\ (I_0+Q_0+\sim Q_1+\sim Q_2)\ (\sim I_0+Q_0+\sim Q_1+Q_2)$

Applico DeMorgan:

$= \quad \sim(\ \sim(I_0+Q_0+Q_1+Q_2)\ +\sim(I_0+Q_0+\sim Q_1+\sim Q_2)+\sim(\ \sim I_0+Q_0+\sim Q_1+Q_2\ )\ )$

$= \quad \sim(\sim I_0\sim Q_0\sim Q_1\sim Q_2\ +\sim I_0\sim Q_0 Q_1 Q_2 + I_0\sim Q_0 Q_1\sim Q_2\ )$

Raccolgo e semplifico:

$= \quad \sim(\ \sim I_0\sim Q_0(\sim Q_1\sim Q_2\ + Q_1Q_2) + I_0\sim Q_0 Q_1\sim Q_2\ )$

$= \quad \sim(\ \sim I_0\sim Q_0\sim(Q_1 \oplus Q_2\ ) + I_0\sim Q_0 Q_1\sim Q_2\ )$

In maniera simile è possibile ottenere una funzione più semplice per Q_2^*.

Alternativamente possiamo cercare di dedurre una funzione semplice per Q_2^* esaminando le caratteristiche topologiche della tabella. Possiamo notare, una volta risolte le indeterminazioni in maniera opportuna come riportato, che Q_0 si comporta per Q_2^* come fosse un segnale di inversione di una funzione F( )definita su $I_0Q_1Q_2$, cioè:

$$\mathbf{Q_2^*} \quad = \quad Q_0 \oplus F(\ I_0Q_1Q_2\ )$$

dove F( ) è:

$I_0Q_1Q_2$	F
000	1
001	0
010	1
011	1
100	0
101	1
110	0
111	0

Analogamente si può notare che in F( ) I_0 si comporta come un segnale di inversione di una funzione G( ) definita sulle sole Q_1Q_2, cioè:

$$\mathbf{F(}\ I_0Q_1Q_2\ \mathbf{)}\ \ \mathbf{=}\ \ I_0 \oplus G(\ Q_1Q_2\ )$$

dove G( ) è la funzione:

$$\mathbf{G(}\ Q_1Q_2\ \mathbf{)}\ \ \mathbf{=}\ Q_1 + \sim Q_2$$

Ne segue che $\mathbf{Q_2}^*$ può essere sintetizzata come:

$$\mathbf{Q_2}^* \quad = \quad I_0 \oplus Q_0 \oplus (\ Q_1 + \sim Q_2\ ) \sim (\ \sim I_0 \sim Q_0 \sim (Q_1 \oplus Q_2\ ) + I_0 \sim Q_0 Q_1 \sim Q_2\ )$$

Il circuito finale risulta quindi: